JOURNAL OF DIFFERENTIAL EQUATIONS 70, 93–113 (1987)

# Probleme de Dirichlet pour le laplacien dans un polygone curviligne

MONIQUE DAUGE ET JEAN-LUC STEUX

*Institut de Mathématiques et d'Informatique, Université de Nantes, UA CNRS 758, 2, rue de la Houssinière, 44072 Nantes Cedex 03, France*

Received April 18, 1986

## 1. INTRODUCTION

I. La question qui a motivé cette étude est la suivante: caractériser les polygones curvilignes $G$ satisfaisant à la condition (C) suivante:

tous les vecteurs propres du problème de Dirichlet pour $\Delta$ sur $G$ sont $C^\infty$ jusqu'au bord de $G$. (C)

Cette question se pose parce que, d'une part il est bien connu (cf. par exemple [K]) que la présence d'angles produit des solutions singulières pour le problème de Dirichlet, et que, d'autre part, une méthode de réflexion permet de montrer que la condition (C) est vérifiée pour tout secteur circulaire d'angle $\pi/n$, avec $n$ entier $\geqslant 2$ (par cette méthode, dans [BB], on étudie les fonctions propres du laplacien sphérique sur des triangles d'angles $\pi/n$, $\pi/p$, $\pi/q$ qui permettent de paver la sphère).

Il s'avère que la condition (C) est équivalente à une propriété (B) de régularité des opérateurs $\Delta - \lambda$ pour des seconds membres $C^\infty$ à support compact dans $G$:

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, si $u \in \mathring{H}^1(G)$ est telle que $(\Delta - \lambda) u \in \mathscr{D}(G)$, alors $u \in C^\infty(\bar{G})$. (B)

La propriété (B) peut s'étudier par un examen des fonctions singulières de $\Delta - \lambda$, pour tout $\lambda$. Il est en outre intéressant et utile de voir ce qui se passe quand $\lambda = 0$, i.e. de caractériser les polygones curvilignes possédant la propriété (A) suivante:

si $u \in \mathring{H}^1(G)$ est telle que $\Delta u \in \mathscr{D}(G)$, alors $u \in C^\infty(\bar{G})$. (A)



0022-0396/87 $3.00

II. Précisons maintenant les hypothèses sur $G$. Nous considérons donc le problème (1.1):

$$\begin{aligned} &(\Delta - \lambda)u = f \qquad \text{sur } G \\ &u \in \mathring{H}^1(G). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Pour un second membre $f$ régulier, les singularités de ce problème (1.1) étant localisées aux points anguleux de $G$, et indépendantes les unes des autres, on peut supposer, sans restreindre la généralité, que $G$ a un seul sommet, situé en $O$, i.e.:

au voisinage de $O$, le bord de $G$ est formé de 2 arcs $C^\infty$ dont les tangentes en $O$ forment un angle $\omega \neq 0 \bmod(\pi)$, de plus le bord de $G$ est $C^\infty$ en dehors de $O$. $(\mathscr{H})$

Quitte à faire une rotation des axes, on peut supposer que l'un des côtés est tangent à l'axe des $X$ et ainsi a pour équation:

$$Y = \Psi_0(X) \qquad \text{avec} \quad \Psi_0(0) = 0, \ \Psi_0'(0) = 0. \tag{1.2}$$

L'équation de l'autre côté pourra toujours s'écrire sous la forme:

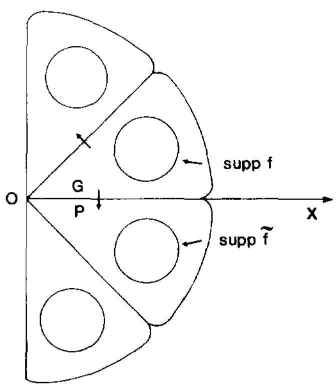
$$X = \Psi_\omega(Y) \qquad \text{avec } \Psi_\omega(0) = 0, \ \Psi_\omega'(0) = \operatorname{cotg} \omega. \tag{1.3}$$

III. Avant de montrer l'équivalence de (B) avec (C), nous exhibons des domaines $G$ vérifiant (B), en précisant l'argument de réflexion dont nous avons déjà parlé.

Supposons que:

$\omega = \pi/n$, $n$ entier $\geqslant 2$ et les côtés de $G$ sont droits au voisinage de $O$. (1.4)

Si $u$ est solution de (1.1) avec $f \in \mathscr{D}(G)$, on peut prolonger $u$ au moyen de (au plus) $n-1$ réflexions à un domaine $P$ qui coïncide au voisinage de $O$ avec un demi-plan et obtenir $\tilde{u}$ dans $\mathring{H}^1(P)$ tel que $(\Delta - \lambda)\tilde{u} = \tilde{f}$ avec $\tilde{f} \in \mathscr{D}(P)$.




La formule de la réflexion à travers l'axe $OX$ est $\tilde{u}(X, -Y) = -u(X, Y)$ pour $Y \geqslant 0$.

Comme $P$ est régulier au voisinage de $O$, l'ellipticité du laplacien donne que $\tilde{u}$ est $C^\infty$ au voisinage de $O$, donc que $u \in C^\infty(\bar{G})$.

D'autre part si nous supposons:

$$\begin{aligned} &\omega = \pi/2,\ \Psi_0(X) = 0 \text{ au voisinage de } O \text{ (côté droit), et} \\ &\Psi_\omega \text{ est une fonction paire au voisinage de } O, \end{aligned} \tag{1.5}$$

alors le même procédé de réflexion à travers l'axe des $X$ aboutit à un domaine $P$ régulier au voisinage de $O$ et donc à $u \in C^\infty(\bar{G})$.

Ainsi les domaines (1.4) et (1.5) sont solutions (que l'on dira "triviales") de (B), et donc de (A). Nous montrerons que pour (A), il existe beaucoup d'autres solutions, alors que pour (B) on est "en général" ramené aux solutions triviales.

IV. Preuve de:

THÉORÈME 1.1. *Pour $G$ vérifiant $(\mathscr{H})$,* (B) *est équivalent à* (C).

Il est évident que (B) implique (C). Montrons la réciproque. Soit $(v_k)$ une base orthonormée de $L^2(G)$ constituée par des vecteurs propres du problème de Dirichlet $-\Delta$ opérant de $\mathring{H}^1(G)$ dans $H^{-1}(G)$, et soit $\lambda_k$ la suite de valeurs propres correspondante.

Nous supposons donc que tous les $v_k$ sont $C^\infty(\bar{G})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et soit $u$ solution du problème (1.1) avec $f \in \mathscr{D}(G)$. $f$ admet la décomposition de Fourier:

$$f = \sum f_k v_k \qquad \text{avec} \quad f_k = \int_G f v_k.$$

Voici d'abord une propriété des $f_k$ qui est vraie quelle que soit la régularité des $v_k$.

LEMME 1.2. *La suite $f_k$, pour $f \in \mathscr{D}(G)$, est à décroissance rapide.*

Comme pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $v_k = (\lambda_k)^{-m} \Delta^m v_k$, on a:

$$f_k = (\lambda_k)^{-m} \int_G f \Delta^m v_k$$

et, comme $f \in \mathscr{D}(G)$, par intégration par parties, on obtient:

$$f_k = (\lambda_k)^{-m} \int_G v_k \Delta^m f.$$

Donc, $\exists C_m$ tel que $\forall k$, $|f_k| \leqslant C_m (\lambda_k)^{-m}$. Or il existe $c > 0$ tel que $\forall k$, $\lambda_k \geqslant ck$. D'où le lemme.

L'énoncé suivant est basé sur la régularité des $v_k$.

LEMME 1.3. *Soit $m$ entier $\geqslant 2$. Alors il existe $P_m$ polynôme de d°$m$ tel que, pour tout $k$:*

$$\|v_k\|_m \leqslant P_m(\lambda_k),$$

*où $\| \ \|_m$ désigne la norme dans l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$.*

Soit $(m(j))_{1 \leqslant j \leqslant J}$, une suite d'entiers strictement positifs telle que:

$$m(j+1) - m(j) \in \{1, 2\}, \qquad m(J) \in \{m, m+1\}$$

et telle que:

> pour tout $j$, $\Delta$ est à image fermée de $H^{m(j)} \cap \mathring{H}^1(G)$ dans $H^{m(j)-2}(G)_{-}$ pour cela il suffit que $m(j) - 1 \notin \mathbb{Z}\pi/\omega_{-}$.

Montrons par récurrence sur $j$ qu'il existe un polynôme $P_{m(j)}$ de d°$j$ tel que

$$\|v_k\|_{m(j)} \leqslant P_{m(j)}(\lambda_k).$$

Pour $j = 1$, on a $m_1 \leqslant 2$ et:

$$\|v_k\|_{m(1)} \leqslant C_1(\|\Delta v_k\|_0 + \|v_k\|_0) = C_1(\lambda_k + 1).$$

Le passage de $j$ à $j+1$ se montre de même.

Montrons maintenant que $u$ est $C^\infty(\bar{G})$. Soit $m$ entier positif. Il suffit de montrer que $u \in H^m(G)$. Soit $u_k = \int_G uv_k$ les coefficients de Fourier de $u$.

On a: $(\Delta - \lambda)u = f$, donc:

$$\text{si } \lambda \neq -\lambda_k, \qquad u_k = -(\lambda + \lambda_k)^{-1} f_k.$$

Il résulte du lemme 1.2 que $(u_k)$ est à décroissance rapide. Or, d'après le lemme 1.3, la suite $k \to \|v_k\|_m$ est à croissance lente. Donc la suite $k \to \|u_k v_k\|_m$ est en particulier dans $l^1$ et $\sum u_k v_k$ converge dans $H^m(G)$ vers $u$.

V. Notre plan est le suivant. Au §2, on introduit une carte locale $\varphi$ qui aplatit les côtés de $G$, et on définit les singularités du problème induit par (1.1). Au §3, on donne le lien entre ces singularités et les propriétés (A) ou (B), et on établit que seul le développement de Taylor en $O$ de l'équation des arcs intervient pour ces propriétés. Au §4, on caractérise les ouverts possédant la propriété (A), et on montre qu'ils sont obtenus par transformation conforme formelle en $O$ à partir de secteurs d'angle $\pi/n$. Au §5, compte tenu qu'un ouvert possédant la propriété (B), doit déjà posséder la propriété (A), on ramène (B) à des conditions portant sur la transformation conforme formelle dont on vient de parler. Pour (B) nous avons obtenu des résultats de 2 sortes:

1°) Des conditions sous lesquelles une solution de (B) ne peut être qu'une solution triviale (§6 et 7).

(2°) Des conditions qui laissent conjecturer l'existence de solutions non triviales (§8).

## 2. CARTE LOCALE. SINGULARITÉS

On rassemble ici des notations qui seront utiles dans toute la suite. On donne aussi, sans démonstration, quelques résultats de base sur les singularités.

Sous l'hypothèse $(\mathscr{H})$, il existe un difféomorphisme $C^\infty$, noté $\varphi$, tel que

$$\varphi(0)=0, \qquad D\varphi(0)=I \qquad et \qquad \varphi(G)=\Omega,$$

où $\Omega$ coïncide avec un secteur plan d'angle $\omega$ en $O$.

Notons $\varphi_1$, $\varphi_2$ les composantes de $\varphi$. Un tel $\varphi$ est donné par:

$$\begin{aligned} \varphi_1(X, Y) &= X - \Psi_\omega(Y) + \operatorname{cotg} \omega(Y - \Psi_0(X)) \\ \varphi_2(X, Y) &= Y - \Psi_0(X) \end{aligned} \tag{2.1}$$

où $\Psi_0$ et $\Psi_\omega$ sont donnés dans (1.2) et (1.3).

Par $\varphi$ le problème (1.1) est transformé en:

$$\begin{aligned} &(L-\lambda)v = g \qquad \text{sur } \Omega \\ &v \in \mathring{H}^1(\Omega) \end{aligned} \tag{2.2}$$

où:

$$\begin{aligned} &L(x, y; \partial_x, \partial_y) \\ &\quad = \|\nabla\varphi_1\|^2(\partial_x)^2 + \|\nabla\varphi_2\|^2(\partial_y)^2 + 2\langle\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_2\rangle\, \partial_x\partial_y + \Delta\varphi_1\, \partial_x + \Delta\varphi_2\, \partial_y \end{aligned}$$

tous les coefficients étant calculés en $(X, Y) = \varphi^{-1}(x, y)$.

Les fonctions singulières $T$ du problème (2.2) donnent par $T \circ \varphi$ les fonctions singulières de (1.1). Voici donc les résultats pour (2.2). Ce qui est spécifique au laplacien se trouve en particulier dans [D1] (cf. aussi [G, K]). La description générale des singularités est faite dans [D2] pour les espaces de Sobolev $H^s$. Ici nous utilisons les singularités dans les espaces à poids

$$H_0^s(\Omega) = \{f \in H^s(\Omega),\, r^{-s+|\alpha|}\, \partial^\alpha f \in L^2(\Omega),\, |\alpha| \leqslant s\}.$$

La démarche est similaire (et même plus simple).

Soit pour $\tau \in \mathbb{C}$:

$$\mathscr{Q}^\tau = \left\{ f = r^\tau \sum_{0 \leqslant j \leqslant J} f_j(\theta) \operatorname{Log}^j r, f_j \in C^\infty([0, \omega]) \right\},$$

$$\mathscr{P}^\tau = \{ f \in \mathscr{Q}^\tau, f_j \in \mathring{H}^1(]0, \omega[) \}$$

où $(r, \theta)$ désignent les coordonnées polaires de centre $O$ dans $\Omega$.

PROPOSITION 2.1. *$\Delta$ opère de $\mathscr{P}^\tau$ dans $\mathscr{Q}^{\tau-2}$ et il existe un opérateur $R$ de $\mathscr{Q}^{\tau-2}$ dans $\mathscr{P}^\tau$ tel que $\Delta R = I$.*

Voici comment $R$ opère sur les polynômes. Soit pour $\tau \in \mathbb{N}$:

$$Q^\tau = \{ f \in \mathscr{Q}^\tau / f \text{ polynôme en } x \text{ et } y \}$$

$$P^\tau = \mathscr{P}^\tau \cap Q^\tau.$$

PROPOSITION 2.2. (i) *Si $\tau\omega/\pi \notin \mathbb{Z}^*$, $R$ est une bijection de $Q^{\tau-2}$ sur $P^\tau$.*

(ii) *Si $\tau\omega/\pi \in \mathbb{Z}^*$, pour un $f_0$ tel que $r^{\tau-2} f_0 \in Q^{\tau-2}$, $R(r^{\tau-2} f_0) \in P^\tau$ si et seulement si:*

$$\int_0^\omega \sin \tau\theta \, f_0(\theta) \, d\theta = 0. \tag{2.3}$$

Pour préciser les idées, rappelons que, dans le cas où $\tau\omega/\pi \in \mathbb{N}$, $\Delta$ est d'indice nul de $P^\tau$ dans $Q^{\tau-2}$. Son noyau est engendré par $r^\tau \sin \tau\theta$; ainsi $R$ est défini modulo ce noyau. Pour un polynôme dans $Q^{\tau-2}$ écrit sous la forme $r^{\tau-2} f_0(\theta)$, $R(r^{\tau-2} f_0(\theta))$ est de la forme:

$$u + \gamma_\tau \int_0^\omega \sin \tau\zeta \; f_0(\zeta) \, d\zeta \cdot r^\tau \, (\operatorname{Log} r \sin \tau\theta + \theta \cos \tau\theta)$$

où $u \in P^\tau$ et $\gamma_\tau$ est une constante non nulle. D'où la condition (2.3).

Faisons un développement asymptotique en $O$ de $L - \lambda$:

$$L - \lambda = \sum_{j \geqslant -2} A_j(\lambda)$$

où les $A_j(\lambda)$ opèrent de $\mathscr{P}^\tau$ dans $\mathscr{Q}^{\tau+j}$. Explicitement en notant:

$$L - \lambda = \sum_{|\alpha| \leqslant 2} a_{\alpha,\lambda} \, \partial^\alpha,$$

on définit:

$$A_j(\lambda) = \sum_{|\alpha| \leqslant 2} \sum_{|\beta| = j + |\alpha|} \partial^\beta a_{\alpha,\lambda}(0) \frac{x^{\beta_1} y^{\beta_2}}{\beta_1! \, \beta_2!} \partial^\alpha.$$

Comme $D\varphi(0) = I$, on a $A_{-2} = \Delta$.

DEFINITION 2.3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$; on définit par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$, $\tau^{k,p}(\lambda)$ dans $\mathscr{P}^{p+k\pi/\omega}$ par:

$$\tau^{k,0}(\lambda) = r^{k\pi/\omega} \sin k\pi\theta/\omega \qquad \text{(singularité du laplacien)}$$

$$\tau^{k,p}(\lambda) = -R \sum_{0 \leqslant j \leqslant p-1} A_{p-2-j}(\lambda)\, \tau^{k,j}(\lambda).$$

Soit $H_0^\infty(\Omega) = \bigcap_{s \geqslant 0} H_0^s$. C'est l'espace des fonctions $C^\infty$, infiniment plates en $O$.

THÉORÈME 2.4 (pour $L = \Delta$ et $\lambda = 0$, il est dans [D1]; cf. aussi [MP]). *Si $v$ est solution de (2.2) avec $g \in H_0^\infty(\Omega)$, alors $\forall s \geqslant 0$:*

$$v - \sum_k c_k(\lambda) \sum_p \tau^{k,p}(\lambda) \in H_0^{s+1}(\Omega) \tag{2.4}$$

*où la somme est étendue aux $k \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que $p + k\pi/\omega \leqslant s$. Les $c_k(\lambda)$ dépendent de $v$; si $\lambda$ n'est pas valeur propre, $c_k(\lambda)$ ne dépend que de $g$ et on a:*

$$c_k(\lambda)(g) = \int_G K_k(\lambda) \cdot g \circ \varphi$$

*où les $K_k$ vérifient $(\Delta - \lambda) K_k = 0$ sur $G$, et se comportent en $r^{-k\pi/\omega} \sin(k\pi\theta/\omega) \circ \varphi$ au voisinage de $O$.*

*Notation.* Pour $\lambda = 0$, on omettra la mention de $\lambda$.

*Remarque* 2.5. On peut rapprocher l'expression des singularités donnée dans la définition 2.3 de la structure que l'on peut déduire des résultats de Wasow dans [W]. Selon [W], en posant $\alpha = \omega/\pi$, les singularités peuvent se représenter par des séries formelles de la forme:

$$\operatorname{Im} \sum_{k,p \in \mathbb{N}} b_{k,p} z^{k/\alpha + p} \qquad \text{si} \quad \alpha \notin \mathbb{Q}$$

$$\operatorname{Im} \sum_{k,p,q \in \mathbb{N}} b_{k,p,q} z^{k/\alpha + p} \operatorname{Log}^q z \qquad \text{si} \quad \alpha \in \mathbb{Q}$$

les coefficients $b_{k,p}$ et $b_{k,p,q}$ étant dans $\mathbb{C}$. Voir aussi la remarque 4.6(a).

## 3. RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

Nous allons déduire du théorème 2.4 le résultat suivant:

THÉORÈME 3.1. *Sous l'hypothèse ($\mathscr{H}$), les deux propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) *$G$ vérifie* (A) (*resp.* (B)).

(ii) $\forall k$, $\forall p$, $\tau^{k,p}$ *est un polynôme* (*resp.* $\forall\lambda$, $\forall k$, $\forall p$, $\tau^{k,p}(\lambda)$ *est un polynôme*).

*Preuve.* (ii) $\Rightarrow$ (i) Les $\tau^{k,p}$ étant réguliers, (2.4) donne que, pour tout $s \geqslant 0$, $v$ est dans $H^s(\Omega)$; donc $u \in C^\infty(\bar{G})$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) On raisonne par l'absurde. On suppose (A) vérifiée et qu'il existe $k$, $p$ tels que $\tau^{k,p}$ ne soit pas un polynôme. Supposons $s := p + k\pi/\omega$ minimal pour cette propriété. Soit $s' > s$ tel que $\forall k'$, $p'$, $p' + k'\pi/\omega \leqslant s'$ implique $p' + k'\pi/\omega \leqslant s$.

De la décomposition (2.4) pour $s'$ on déduit que pour tout $g \in \mathscr{D}(\Omega)$, grâce à (A):

$$\sum_{p + k\pi/\omega = s} c_k(g)\, \tau^{k,p} \in H^{s'+1}(\Omega).$$

Par hypothèse, l'un de ces $\tau^{k,p}$ n'est pas un polynôme. Comme il est dans $\mathscr{P}^s$, on en déduit qu'il n'est pas dans $H^{s'+1}$. Par conséquent, il existe une combinaison linéaire non nulle des $c_k(g)$, notée $d(g)$ qui prend la valeur 0 pour tout $g \in \mathscr{D}(\Omega)$.

Comme $d(g)$ est de la forme $\int_G K \cdot g \circ \varphi$ avec $K \neq 0$ et analytique à l'intérieur de $G$, on arrive à une contradiction.

Pour (B), la démonstration est similaire.

*Remarque* 3.2. Par le même raisonnement, on voit que dans (A) (resp. (B)) il est équivalent de se restreindre à $f \in \mathscr{D}(G_0)$ où $G_0$ est un ouvert non vide de $G$ (si $G$ est connexe).

COROLLAIRE 3.3. *Si $G$ vérifie* (A) (*resp.* (B)), *on a la régularité* $C^\infty(\bar{G})$ *pour $u$ solution de* (1.1) *avec* $\lambda = 0$ (*resp.* $\lambda$ *quelconque*) *et* $f \in H_0^\infty(G)$.

COROLLAIRE 3.4. *Si $G$ vérifie* (A), *alors* $\forall k \in \mathbb{Z}^*$, $r^{k\pi/\omega} \sin k\pi\theta/\omega = \tau^{k,0}$ *est un polynôme. Donc* $\pi/\omega = n \in \mathbb{N}^*$.

Par conséquent, dans toute la suite on supposera (sauf mention du contraire) que

$$\boxed{\omega = \pi/n, \qquad n \text{ entier } \geqslant 2.}$$

Comme les $\tau^{k,p}(\lambda)$ ne dépendent que du développement de Taylor en $O$ de $\varphi$, on obtient des solutions de (B) par perturbation plate ($H_0^\infty$) des solutions (1.4) et (1.5) déjà exhibées.

COROLLAIRE 3.5. (a) *Si* $\omega = \pi/n$ *et si les arcs sont tangents à l'ordre infini à leurs tangentes, $G$ vérifie* (B).

(b) *Si* $\omega=\pi/2$, *et si* $\Psi_0 \in H_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ *et* $\Psi_\omega$ *est paire modulo* $H_0^\infty$, *alors* $G$ *vérifie* (B). *On dira que ce sont les* solutions "triviales" *de* (B).

## 4. Caractérisation de la propriété (A)

Supposons que la carte $\varphi$ (cf. §2) soit une application conforme (sous-entendu directe) du plan. Alors il existe une fonction analytique complexe $\phi$ telle que:

$$\phi(X+iY)=\varphi_1(X, Y)+i\varphi_2(X, Y).$$

Alors:

$$\|\nabla\varphi_1\|=\|\nabla\varphi_2\|=|d_z\phi|; \qquad \langle\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_2\rangle=0; \qquad \Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2=0.$$

Soit $l(X, Y)=|(d_z\phi)\circ\phi^{-1}|^2$. On a: $L=l\Delta$.
On remarque que $1/l=|d_z\vartheta|^2$, où $\vartheta=\phi^{-1}$. Ainsi:

$$(L-\lambda)v=g \text{ équivaut à } (\Delta-|d_z\vartheta|^2\lambda)v=|d_z\vartheta|^2 g. \tag{4.1}$$

En particulier, pour $\lambda=0$, et pour $g\in\mathscr{D}(\Omega)$ (2.2) équivaut à:

$$v\in\mathring{H}^1(\Omega), \qquad \Delta v=h \qquad \text{avec} \quad h\in\mathscr{D}(\Omega).$$

Comme $\Omega$ a ses côtés droits et $\omega=\pi/n$ (cf. (1.4)), on obtient que $v\in C^\infty(\bar{\Omega})$, donc $u\in C^\infty(\bar{G})$. Ainsi $G$ vérifie la propriété (A).

Il découle du théorème 2.4 que seul le développement de Taylor de $\varphi$ intervient dans la structure des singularités. C'est pourquoi on introduit la définition suivante:

Définition 4.1. Soit $\varphi$ un difféomorphisme $C^\infty$ au voisinage de $O$ dans $\mathbb{R}^2$. $\varphi$ est dit *conforme en* $O$ si, pour tout entier $m$, son développement de Taylor $\varphi^m$ à l'ordre $m$ en $O$ est conforme (au sens ci-dessus), i.e., la série formelle de Taylor de $\varphi$ en $O$ est conforme.

*Remarques* 4.2. (a) Un exemple trivial de carte conforme en $O$ est

$$\varphi=I+\varepsilon \qquad \text{où} \quad \varepsilon\in H_0^\infty\times H_0^\infty.$$

(b) Les cartes conformes en $O$ constituent un groupe pour la composition.

(c) En général, conforme en $O$ n'implique pas analytique. Mais si $\varphi$ est à la fois conforme en $O$ et analytique réelle, alors $\varphi$ est conforme au sens habituel.

DÉFINITION 4.3. *G est dit conforme en O* s'il existe une carte conforme en $O$ qui envoie $G$ sur un secteur plan au voisinage de $O$.

THÉORÈME 4.4. *Si G satisfait à* ($\mathscr{H}$), *alors G vérifie la propriété* (A) *si et seulement si G est conforme en O et* $\omega = \pi/n$.

Avant de démontrer ce théorème, nous allons étudier l'influence de la condition "$G$ conforme en $O$" sur les équations des arcs, données par $\Psi_0$ et $\Psi_\omega$ (cf. (1.2) et (1.3)).

$G$ conforme en $O$ signifie qu'il existe une carte $\chi$ conforme en $O$ telle que $\chi(\Omega) = G$, où $\Omega$ coïncide au voisinage de $O$ avec un secteur d'angle $\omega$. Pour le moment, ne faisons pas de restriction sur $\omega$. On suppose que $D\chi(0) = I$. Ainsi, la série de Taylor formelle de $\chi$ en $O$ peut s'écrire sous la forme:

$$\vartheta(z) = \sum_{j \geqslant 0} d_j z^j \qquad \text{avec} \quad d_0 = 0,\ d_1 = 1,\ d_j = \alpha_j + i\beta_j. \tag{4.2}$$

Posant $z = \rho e^{i\theta}$, on peut paramétrer par $\rho$ les deux côtés de $\chi(\Omega)$: pour $\theta = 0$ on obtient $\{(X_0(\rho), Y_0(\rho)), \rho \geqslant 0\}$; pour $\theta = \omega$, c'est $\{(X_\omega(\rho), Y_\omega(\rho)), \rho \geqslant 0\}$.

Ainsi, on aura:

$$\Psi_0 = Y_0 \circ (X_0)^{-1} \qquad \text{et} \qquad \Psi_\omega = X_\omega \circ (Y_\omega)^{-1} \tag{4.3}$$

(égalité entre séries de Taylor formelles) avec:

$$X_0(\rho) = \sum \alpha_j \rho^j$$

$$Y_0(\rho) = \sum \beta_j \rho^j$$

$$X_\omega(\rho) = \sum (\alpha_j \cos j\omega - \beta_j \sin j\omega)\, \rho^j$$

$$Y_\omega(\rho) = \sum (\alpha_j \sin j\omega + \beta_j \cos j\omega)\, \rho^j.$$

Ces relations et (4.3) joints au fait que:

$$(f \circ g^{-1})^{(j)} \circ g = \frac{f^{(j)} \cdot g^{(1)} - f^{(1)} \cdot g^{(j)}}{[g^{(1)}]^{j+1}} + R_j$$

où $(j)$ désigne la dérivée d'ordre $j$ et $R_j$ ne fait intervenir que des dérivées d'ordre strictement inférieur à $j$, permettent d'obtenir:

$$\begin{aligned} &\Psi_0^{(j)}(0) = j!\, \beta_j + F_{j,0} \\ &\Psi_\omega^{(j)}(0) = -j!\, \sin^{-j-1}\omega(\alpha_j \sin(j-1)\omega + \beta_j \cos(j-1)\omega) + F_{j,\omega} \end{aligned} \tag{4.4}$$

où $F_{j,0}$ et $F_{j,\omega}$ sont des fonctions des $\alpha_k$ et $\beta_k$ pour $k \leqslant j-1$

Le déterminant de ce système en $(\alpha_j, \beta_j)$ est équivalent à $\sin(j-1)\omega$. La discussion de ce système donne le résultat suivant:

PROPOSITION 4.5. *Soit G vérifiant* $(\mathscr{H})$, *d'angle* $\omega$. *Les deux propositions suivantes sont équivalentes*:

(i) $G=\chi(\Omega)$ *avec* $\vartheta$ *sa série de Taylor formelle sous la forme* (4.2);

(ii) *pour tout* $j \geqslant 2$ *tel que* $(j-1)\omega = N$ *entier, on a*:

$$\Psi_0^{(j)}(0) + (-1)^N \sin^{j+1}\omega \Psi_\omega^{(j)}(0) = F_j \tag{4.5}$$

*où* $F_j$ *peut être considéré*

*soit comme une fonction des* $\alpha_k$ *et* $\beta_k$ *pour* $k \leqslant j-1$,

*soit comme une fonction des* $\Psi_0^{(k)}(0)$ *et* $\Psi_\omega^{(k)}(0)$ *pour* $k \leqslant j-1$.

$F_j$ *est plus précisément un polynôme dont les coefficients dépendent de* $\omega$.

*Remarque* 4.6. (a) Si $\pi/\omega \notin \mathbb{Q}$, tout $G$ vérifiant $(\mathscr{H})$ et d'angle $\omega$ est conforme en $O$. On peut facilement en déduire que les singularités sur $G$ peuvent s'exprimer comme séries formelles de la forme $S_k = \operatorname{Im} \sum_{p \in \mathbb{N}} d_{k,p} z^{k\pi/\omega + p}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ avec $d_{k,p}$ réels et $d_{k,0} = 1$. Pour voir cela, il suffit de composer la transformation conforme $\phi$ avec l'application $\varepsilon$: $z \to z^{\pi/\omega} = Z$. $\varepsilon \circ \phi(G)$ est le demi-plan $\operatorname{Im} Z > 0$ et comme $S_k$ est harmonique et s'annule sur le bord de $G$, $\varepsilon \circ \phi(S_k)$ est harmonique et s'annule sur $\operatorname{Im} Z = 0$. D'où l'on déduit que $\varepsilon \circ \phi(S_k)$ est la partie imaginaire de $Z^k$. $(\phi(z))^{k\pi/\omega}$ est de la forme indiquée. Ce genre d'argument préfigure la preuve du théorème 4.4.

(b) Si $\pi/\omega \in \mathbb{Q}$, tout $G$ dont les équations des arcs $\Psi_0$ et $\Psi_\omega$ vérifient les relations (4.4), est conforme en $O$; si de plus $\Psi_0$ et $\Psi_\omega$ sont analytiques, alors la carte $\chi$ peut être choisie analytique, donc conforme au sens usuel. Par contre si $\pi/\omega \notin \mathbb{Q}$, "$\Psi_0$ et $\Psi_\omega$ analytiques" n'implique pas forcément que $\chi$ est analytique; cela dépend de la proximité asymptotique des groupes $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}\pi/\omega$.

(c) Si $\pi/\omega = n$, les conditions (4.5) apparaissent pour tout $j = Nn+1$, $N \geqslant 1$. Si $G$ est conforme en $O$, l'un des arcs est quelconque et l'autre a ses dérivées d'ordre $Nn+1$ imposées.

*Remarque* 4.7. Si $\omega = \pi/n$, les coefficients $\alpha_{Nn+1}$ du développement (4.2) de $\chi$ n'ont pas d'incidence géométrique. Dans la résolution de (4.4), on peut toujours prendre $\alpha_{Nn+1} = 0$ $\forall N \geqslant 1$.

EXEMPLE 4.8 (cas où $n=2$). (a) La première relation apparait pour $j=3$. $F_3$ est nul. D'où:

$$\Psi_0^{(3)}(0)=\Psi_{\pi/2}^{(3)}(0).$$

(b) Si le côté $\Psi_0$ est droit, $\chi$ envoie $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et les $d_j$ sont réels. On en déduit que $X_\omega$ est paire et $Y_\omega$ impaire. Donc $\Psi_\omega$ est paire (modulo $H_0^\infty$). Si le côté $\Psi_\omega$ est droit, les $d_{2j+1}$ sont réels, ainsi que les $id_{2j}$. On en déduit que $\Psi_0$ est paire (modulo $H_0^\infty$).

Ainsi, si $G$ vérifie (A) et est d'angle $\pi/2$, alors si l'un des côtés est droit, l'autre est "pair". On est dans le cas de la solution triviale du corollaire 3.5(b).

EXEMPLE 4.9. Soit $n=2$. Prenons $\vartheta(z)=z+(\alpha+i\beta)\,z^2$. On obtient:

$$\Psi_0(x)=\frac{\beta}{\alpha}\left(x-\frac{-1+\sqrt{1+4\alpha x}}{2\alpha}\right)$$

et $\Psi_\omega$ est obtenu par une formule similaire en remplaçant $\beta$ par $-\alpha$ et $\alpha$ par $-\beta$.

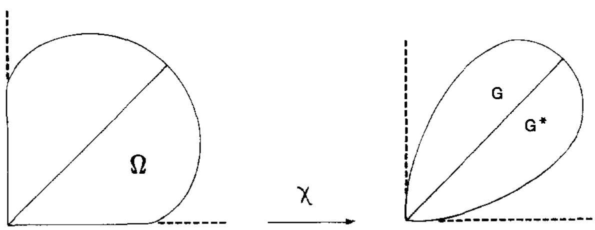
On retrouve que $\Psi_0^{(3)}(0)=\Psi_\omega^{(3)}(0)$ $(=-12\alpha\beta)$. Par contre, en général $\Psi_0^{(5)}(0)\neq\Psi_\omega^{(5)}(0)$. On remarque que $\Psi_0=\Psi_\omega$ si et seulement si $\alpha=-\beta$.

Dans ce cas, le domaine $G$ est symétrique par rapport à la première diagonale et les équations de ses côtés dans le repère formé par les deux diagonales sont

$$y=\pm(x+2\alpha x^2).$$

Enfin le domaine $G^*$ d'angle $\pi/4$ égal à une "moitié" de $G$ coupé par la diagonale vérifie lui aussi la propriété (A) puisqu'une réflexion à travers cette diagonale permet de se ramener à $G$. Cela se voit aussi directement en constatant que, pour $\vartheta(z)=z+\alpha(1-i)z^2$, $\chi$ envoie $\Omega$ d'angle $\pi/4$ sur $G^*$. En effet:

$$X_{\pi/4}(\rho)+iY_{\pi/4}(\rho)=(\rho/\sqrt{2}+\alpha\rho^2)(1+i).$$



*Preuve du théorème* 4.4. Pour montrer que $G$ conforme en $O$ a la propriété (A), on constate par les mêmes arguments qu'au début du paragraphe, que le développement formel de $L$ est $|\partial_z \phi|^2 \Delta$. Donc les $A_j$ sont tous de la forme $l_j \Delta$. Comme $\Delta \tau^{k,0} = 0$, la formule définissant les singularités $\tau^{k,p}$ (définition 2.3) donne que tous les $\tau^{k,p}$, pour $p \geqslant 1$, sont nuls. Comme $\omega = \pi/n$, $\tau^{k,0}$ est un polynôme. Donc tous les $\tau^{k,p}$ sont des polynômes et $G$ vérifie (A).

Réciproquement, supposons que $G$ a la propriété (A). On va construire un difféomorphisme $\psi$ conforme en $O$ envoyant $G$ sur $\Omega$ à l'aide d'une racine $n$-ième de la première singularité. Cette idée nous a été suggérée par B. Helffer, ce qui nous a permis de beaucoup raccourcir notre démonstration.

Pour une fonction $a$ $C^\infty$ en $O$, nous notons $\tilde{a}$ sa série de Taylor formelle en $O$, et nous notons $\equiv$ l'égalité entre séries formelles.

Nous avons, par construction:

$$\tilde{L}\left(\sum_{p \geqslant 0} \tau^{1,p}\right) \equiv 0.$$

Donc:

$$\Delta S^1 \equiv 0 \qquad \text{où} \quad S^1 = \sum_{p \geqslant 0} \tau^{1,p} \circ \phi.$$

$S^1$ étant harmonique, il existe une série entière complexe $Z^1 = \sum c_j z^j$ telle que

$$\operatorname{Im} Z^1 \equiv S^1.$$

Le terme de plus bas degré non nul de $S^1$ est $|z|^n \sin n\theta$. Par conséquent les $c_j$ sont nuls pour $j = 0, \ldots, n-1$ et $c_n = 1$. Donc il existe une série entière complexe $\tilde{\psi} = \sum_{j \geqslant 1} a_j z^j$ avec $a_1 = 1$ telle que $\tilde{\psi}^n \equiv Z^1$.

Donc $\tilde{\psi}$ envoie formellement les "lignes nodales" de $S^1$ sur celles de

$$z \to \operatorname{Im} z^n.$$

Des lignes nodales de $S^1$ sont constituées par les séries formelles en $O$ des côtés de $G$, à savoir $(X, \tilde{\Psi}_0(X))$ et $(\tilde{\Psi}_\omega(Y), Y)$. Les lignes nodales correspondantes de $\operatorname{Im} z^n$ sont $(x, 0)$ et $(y \operatorname{cotg} \pi/n, y)$. Donc:

$$\tilde{\psi}(X, \tilde{\Psi}_0(X)) \equiv (x, 0) \qquad \text{et} \qquad \tilde{\psi}(\tilde{\Psi}_\omega(Y), Y) \equiv (y \operatorname{cotg} \pi/n, y).$$

Par conséquent, il existe un difféomorphisme $\psi$ de série de Taylor en $O$ égale à $\tilde{\psi}$ qui envoie $G$ sur $\Omega$. Notons qu'on aurait pu faire la démonstration avec $S^k$ au lieu de $S^1$.

Pour terminer ce paragraphe, donnons une extension de la propriété de régularité (A) pour des seconds membres $C^\infty$ ou analytiques sur $\bar{G}$ (ils ne sont plus supposés plats en $O$).

THÉORÈME 4.10. *Soit $G$ conforme en $O$, d'angle $\pi/n$. Alors, il existe pour chaque $N \geqslant 1$, un polynôme $L_N(X_1, X_2)$ de degré $Nn$ tel que l'on ait le résultat de régularité suivant:*

$$si\ u \in \mathring{H}^1(G),\ \Delta u = f \in C^\infty(\bar{G}) \qquad et \quad \forall N \geqslant 1,\ L_N(D_x, D_y)\, f(0) = 0$$

*alors $u \in C^\infty(\bar{G})$.*

C'est une conséquence du théorème 4.4 et du résultat correspondant pour un secteur, cf. par exemple [D1].

Les $L_N$ ne dépendent que du développement de Taylor en $O$ de $\Psi_0$ et $\Psi_\omega$ et sont tels que pour $u \in \mathring{H}^1(G)$:

$$\Delta L_N(D_x, D_y)\, u(0) = 0.$$

Disons que $G$ est conforme s'il existe une carte $\varphi$ conforme au sens usuel telle que $\varphi(G) = \Omega$. D'après la remarque 4.6, si $G$ est conforme en $O$ d'angle $\pi/n$ et a des côtés analytiques, $G$ est conforme (d'angle $\pi/n$). La réciproque est évidente.

COROLLAIRE 4.11. *Soit $G$ conforme d'angle $\pi/n$. On a le résultat de régularité analytique suivant:*

$$si\ u \in \mathring{H}^1(G),\ \Delta u = f \in \mathscr{A}(\bar{G}) \qquad et \qquad \forall N \geqslant 1,\ L_N(D_X, D_y)\, f(0) = 0$$

*alors $u \in \mathscr{A}(\bar{G})$.*

D'après le théorème 4.10, $u \in C^\infty(\bar{G})$ et grâce au résultat de [BS], $u \in \mathscr{A}(\bar{G})$.

## 5. PROPRIÉTÉ (B): RÉDUCTION

Si $G$ possède la propriété (B), il possède évidemment la propriété (A). Donc, d'après le théorème 4.4, il existe un difféomorphisme $\chi$ conforme en $O$ tel que $\chi(\Omega) = G$, où $\Omega$ coïncide avec un secteur d'angle $\pi/n$ au voisinage de $O$.

Ainsi la donnée de $G$ équivaut à celle de $\chi$. On va chercher les conditions sur $\chi$, et plus précisément sur la série de Taylor en $O$ de $\chi$, que l'on note $\vartheta$, pour que les singularités $\tau^{k,p}(\lambda)$ soient des polynômes (cf. théorème 3.1).

D'après (4.1), $L - \lambda = l(\Delta - |d_z \vartheta|^2 \lambda)$ (égalité entre séries formelles) avec $l(0) \neq 0$. Donc les $\tau^{k,p}(\lambda)$ peuvent se déterminer grâce aux formules de la definition 2.3 à l'aide des $A_j$ obtenus par le développement de $\Delta - |d_z \vartheta|^2 \lambda$ (au lieu de $L - \lambda$).

Cela donne:

LEMME 5.1. *On suppose que* $G = \chi(\Omega)$ *avec* $\vartheta(z) = \sum b_j z^{j+1}/(j+1)$, $b_0 = 1$ *et* $\omega = \pi/n$. *Soit pour* $j \in \mathbb{N}$:

$$C_j = \sum_{k+l=j} b_k \bar{b}_l z^k \bar{z}^l.$$

*Alors, pour* $J \geqslant 1$:

$$\tau^{k,J}(\lambda) = \sum_{p=1}^{J} \lambda^p \sum_{m_1 + \cdots + m_p = J - 2p} RC_{m_1} R \cdots RCm_p \tau^k$$

*où* $\tau^k = r^{kn} \sin kn\theta = (z^{kn} - \bar{z}^{kn})/2i$.

Pour que $\tau^{k,J}(\lambda)$ soit un polynôme pour tout $\lambda$, il faut et il suffit que chacun de ses coefficients en $\lambda$ soit un polynôme. Exploitant le fait que si $z \notin n\mathbb{N}$, $R$ envoie les polynômes homogènes de degré $z-2$ sur des polynômes (cf. proposition 2.2), on montre par récurrence sur $J$ à $k$ fixé qu'il suffit de se restreindre aux $J$ qui sont des multiples de $n$:

PROPOSITION 5.2. *Pour* $G$ *comme dans le lemme* 5.1, *la propriété* (B) *équivaut à*: $\forall p \geqslant 1$, $\forall N \geqslant 1$ *tels que* $Nn - 2p > 0$, *on a la condition* $(B_{p,N})$:

$$\forall k \geqslant 1 \quad \sum_{m_1 + \cdots + m_p = Nn - 2p} RC_{m_1} R \cdots RC_{m_p} \tau^k \quad \textit{polynôme.} \qquad (\mathrm{B}_{p,N})$$

Les $C_j$ dépendant directement des $b_j$ et les $b_j$ déterminant la carte $\chi$ telle que $\chi(\Omega) = G$, il s'agit pour nous de déterminer les $b_j$ pour que les conditions $(\mathrm{B}_{p,N})$ soient réalisées. Rappelons que nous avons trouvé, par réflexion, des "solutions triviales" à (B)—cf. corollaire 3.5. En remarquant que $\chi = I$ correspond à $b_0 = 1$ et les autres $b_j$ nuls et grâce à l'exemple 4.8 pour $n = 2$, on obtient:

LEMME 5.3. (a) *Pour* $n \geqslant 3$, *les solutions triviales sont telles que*:

$$b_0 = 1, \qquad b_j = 0 \qquad \textit{pour} \quad j \geqslant 1;$$

(b) *Pour* $n = 2$, *les solutions triviales sont telles que*:

$$b_0 = 1, \qquad b_{2j} \in \mathbb{R} \qquad \textit{et soit} \begin{cases} b_{2j+1} \in \mathbb{R} & \forall j \geqslant 0, \\ ib_{2j+1} \in \mathbb{R} & \forall j \geqslant 0. \end{cases}$$

## 6. Solutions triviales

Voici un énoncé qui indique que beaucoup de "solutions" de (A) ne sont pas solutions de (B).

Théorème 6.1. *Supposons que $G$ vérifie* (B) *avec un angle $\omega = \pi/n$ où $n \in 4\mathbb{N}$. Si $b_1, ..., b_{2n-1}$ sont nuls alors tous les $b_j$ sont nuls pour $j \geqslant 1$.*

Autrement dit, si les côtés de $G$ sont tangents à l'ordre $2n$ à leurs tangentes en $O$, alors ils sont tangents à l'ordre infini.

*Remarque* 6.2. (i) Grâce à des calculs théoriques complémentaires d'une part, et d'autre part programmés sur micro-ordinateur, nous avons obtenu le résultat suivant si $G$ vérifie (B) avec $\omega = \pi/n$ où $n = 3, 4$ ou $6$:

si $b_1 = 0$, alors tous les $b_j$ sont nuls pour $j \geqslant 1$.

(ii) Cela amène à formuler la conjecture: si $G$ vérifie (B) et si $b_1 = 0$, alors $G$ est solution triviale; (elle est donc vérifiée pour $n = 3$, 4 ou 6; des calculs faits pour $n = 2$ la confirment également).

*Preuve du théorème* 6.1. Pour $m \geqslant 2$, soit $(\mathscr{H}_m)$ la condition:

$$b_1, ..., b_{m-1} = 0. \tag{$\mathscr{H}_m$}$$

On suppose donc que $(\mathscr{H}_{2n})$ est vérifiée et on veut montrer que $(\mathscr{H}_m)$ est vérifiée pour tout $m$. Pour cela, il suffit d'établir que, pour tout $m \geqslant 2n$:

$(\mathscr{H}_m)$ implique que $b_m = 0$ (donc que $(\mathscr{H}_{m+1})$ est vérifiée).

Cela est basé sur la proposition suivante que nous démontrerons au §7.

Proposition 6.3. *On suppose que $G$ vérifie* (B) *avec $\omega = \pi/n$ et que l'on a $(\mathscr{H}_m)$.*

(a) *Pour $p \leqslant m$ tel que $m + 2p = Nn$ on a*:

$$(1 - (-1)^N e^{im\pi/n})\, b_m \in \mathbb{R};$$

(b) *pour $p \leqslant m - n$ tel que $2m + 2p = Nn$ on a*:

$$(1 - (-1)^N e^{2im\pi/n})(b_m)^2 \in \mathbb{R}.$$

D'autre part, comme $\operatorname{Re} b_{nN} = (nN + 1)\, \alpha_{nN+1}$ une conséquence immédiate de la remarque 4.7 est:

Lemme 6.4. *Si $m \in n\mathbb{N}$ et si $b_m \in \mathbb{R}$, on peut supposer $b_m = 0$ sans changer $G$.*

Supposons donc $(\mathscr{H}_m)$ et montrons que $b_m = 0$. Il y a deux cas:

(1°) Si $m$ est pair, il existe $N$ et $p$, $1 \leqslant p \leqslant n/2$ tels que:

$$p + m/2 = nN/2, \qquad \text{i.e.:} \qquad m + 2p = nN.$$

D'autre part, $m + 2(p + n/2) = n(N+1)$ et comme $p + n/2 \leqslant n \leqslant m$, on peut appliquer la proposition 6.3(a), pour $(p, N)$ et $(p + n/2, N+1)$. On obtient:

$$(1 \pm e^{im\pi/n})\, b_m \in \mathbb{R},$$

donc:

$$b_m \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad e^{im\pi/n} b_m \in \mathbb{R}.$$

** Si $m$ n'est pas un multiple de $n$, on en déduit que $b_m = 0$.

** Si $m$ est un multiple de $n$, on en déduit que $b_m \in \mathbb{R}$, d'où, d'après le lemme 6.4, $b_m = 0$.

(2°) Si $m$ est impair, il existe $N$ et $p$, $1 \leqslant p \leqslant n/2$ tels que:

$$m + p = nN/2, \qquad \text{i.e.:} \qquad 2m + 2p = nN.$$

D'autre part, $2m + 2(p + n/2) = n(N+1)$ et comme $p + n/2 \leqslant n \leqslant m - n$, on peut appliquer la proposition 6.3(b), pour $(p, N)$ et $(p + n/2, N+1)$. On obtient:

$$(1 \pm e^{2im\pi/n})(b_m)^2 \in \mathbb{R},$$

donc:

$$(b_m)^2 \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad e^{2im\pi/n}(b_m)^2 \in \mathbb{R}.$$

Comme $m$ est impair et $n$ multiple de 4, $2m/n$ n'est pas entier, et on en déduit que $(b_m)^2 = 0$.

## 7. Étude partielle des conditions $(\mathrm{B}_{p,N})$

Dans le but de démontrer la proposition 6.3, on va d'abord préciser la proposition 2.2 en calculant l'opérateur $R$ d'inversion de $\Delta$ sur des fonctions de la forme $r^{\tau-2} e^{i\beta\theta}$, pour $\tau \geqslant 2$.

Lemme 7.1. *Soit*:

$$R_{\tau,\beta} := \frac{r^\tau}{\tau^2 - \beta^2} \left(e^{i\beta\theta} - a_{\tau,\beta} e^{i\tau\theta} - \bar{a}_{\tau,-\beta} e^{-i\tau\theta}\right)$$

*avec*

$$a_{\tau,\beta} = e^{i(\beta-\tau)\omega/2} \frac{\sin(\beta+\tau)\omega/2}{\sin \tau\omega} \qquad \text{si} \quad \omega\tau/\pi \notin \mathbb{N}$$

*et*

$$a_{\tau,\beta} = \tfrac{1}{2} \quad \textit{sinon.}$$

(a) *Si* $\omega\tau/\pi \notin \mathbb{N}$, *alors* $R(r^{\tau-2}e^{i\beta\theta}) = R_{\tau,\beta}$.

(b) *Si* $\omega\tau/\pi \in \mathbb{N}$, *et si* $f_0(\theta) = \sum_\beta c_\beta e^{i\beta\theta}$ *vérifie* (2.3), *alors on peut calculer* $R(r^{\tau-2} \sum_\beta c_\beta e^{i\beta\theta})$ *sous la forme* $\sum_\beta c_\beta R_{\tau,\beta}$.

A cause de la forme de la condition (2.3), on a avantage à écrire tout en coordonnées polaires (c'est d'ailleurs le cas pour tous les problèmes à singularités coniques).

*Preuve de la proposition* 6.3(a)

Sous la condition $(\mathscr{H}_m)$, $C_1, ..., C_{m-1} = 0$ et $C_m = r^m(b_m e^{im\theta} + \bar{b}_m e^{-im\theta})$. Pour $p$, $N$ tels que $m + 2p = Nn$, $(B_{p,N})$ se réduit à:

$$\sum_{0 \leqslant J \leqslant p-1} R^{p-J} C_m R^J \tau^k \text{ polynôme} \qquad \forall k \geqslant 1.$$

A l'aide du lemme 7.1, en écrivant $\tau^k = -ir^{kn}(e^{ikn\theta} - e^{-ikn\theta})/2$ on obtient que: $\sum_{0 \leqslant J \leqslant p-1} R^{p-1-J} C_m R^J \tau^k$ est de la forme

$$r^{kn+Nn-2} \sum_{l=-m,m,m+2,...,Nn-2} \mathscr{D}_l(k)\, e^{i(kn+l)\theta} + \text{conjugué}. \tag{7.1}$$

La condition $(\mathrm{B}_{p,N})$ donne que $R$ appliqué à (7.1) est un polynôme, donc d'après (2.3), il faut que:

$$\sum_l \mathscr{D}_l(k) \int_{[0,\pi/n]} \sin(kn+Nn)\theta \; e^{i(kn+l)\theta}\, d\theta + \text{conjugué} = 0.$$

En faisant le calcul:

$$\sum_l \mathscr{D}_l(k)(1-(-1)^N e^{il\pi/n})[(2kn+Nn+l)^{-1} - (Nn-l)^{-1}] + \text{conjugué} = 0. \tag{7.2}$$

Les $\mathscr{D}_l(k)$ sont des fractions rationnelles en $k$ que l'on précisera.

Notons, pour $a$ réel, $K_a$ la fraction rationnelle:

$$\boxed{K_a(k) = \frac{1}{kn+a}}$$

Pour $l=-m$, on a: $2kn+Nn+l=2(kn+p)$. Ainsi le terme entre crochets de (7.2) fait apparaître $K_p$. Or on montre pour chaque $J$ fixé et par récurrence sur $H$ le résultat suivant:

LEMME 7.2. *Sous les conditions* $(\mathscr{H}_m)$ *et* (B), $R^H C_m R^J \tau^k$ *est de la forme*:

$$r^{kn+m+2J+2H} \sum_{l \in \mathscr{L}(J,H)} [C_{l,J,H}(k)\, e^{i(kn+l)\theta} + \text{conjugué}]$$

*avec*:

$$\mathscr{L}(J,H)=\{-m,m\} \cup \{m+2J+2\mu,\ 1 \leqslant \mu \leqslant H\},$$

$$C_{-m,J,H}(k)=\frac{\bar{b}_m}{2i}\, 4^{-J-H} K_1 \cdots K_{J+H} \frac{(m+J)!}{J!(m+J+H)!}.$$

*Les autres $C_{l,J,H}$ sont des fractions rationnelles en k qui ne font intervenir que $K_1, \ldots, K_{J+H}$ et $K_{m+J+\gamma}$ avec $\gamma \in [1, J+2H[$.*

N.B.: pour $H=0$, $R^J\tau^k=(4^{-J}K_1 \cdots K_J r^{kn+2J} \sin kn\theta)/J!$.

Écrivons (7.2) sous la forme: $F(k)=0$. $F$ est donc une fraction rationnelle qui s'annule sur tous les entiers $k \geqslant 1$. Elle est donc identiquement nulle. En particulier, le coefficient $\Gamma_p$ de $K_p$ après décomposition en éléments simples doit être nul. Comme $p \leqslant m$, il ressort du lemme 7.2 que dans (7.2) seul $l=-m$ contribue à $\Gamma_p$. Grâce au calcul des $C_{-m,J,H}$, on obtient que:

$$\Gamma_p = i\gamma(p,m)\, \bar{b}_m(1-(-1)^N e^{-im\pi/n}) + \text{conjugué},$$

où $\gamma(p,m)$ est un réel non nul qui ne dépend que de $p$ et $m$. $\Gamma_p=0$ donne bien: $\bar{b}_m(1-(-1)^N e^{-im\pi/n}) \in \mathbb{R}$. D'où la proposition 6.3(a).

*La preuve de la proposition* 6.3(b) est analogue. En voici les grandes lignes. Sous $(\mathscr{H}_m)$, $C_{m+1}, \ldots, C_{2m-1}=0$ et:

$$C_{2m}=r^{2m}(b_{2m}e^{2im\theta}+b_m\bar{b}_m+\bar{b}_{2m}e^{-2im\theta}).$$

La condition $(\mathrm{B}_{p,N})$ se réduit à:

$$\sum_{0 \leqslant J \leqslant p-1} R^{p-J} C_{2m} R^J \tau^k + \sum_{0 \leqslant J \leqslant p-2} \ \sum_{1 \leqslant H \leqslant p-1-J} R^{p-J-H} C_m R^H C_m R^J \tau^k \text{ polynôme.}$$

Cela implique une condition du même type que (7.2) avec une somme etendue à $l \in \{-2m, 0, 2, ..., Nn-2\}$. On montre comme ci-dessus que $K_p$ n'apparaît que dans la contribution de $l = -2m$. Le calcul de $\mathscr{D}_{-2m}$ donne:

$$\mathscr{D}_{-2m} = 4^{1-p} K_1 \cdots K_{p-1} [\bar{b}_{2m} \alpha_p + (\bar{b}_m)^2 \beta_p]/2i$$

où:

$$\alpha_p = \sum_{J=0}^{p-1} \frac{(2m+J)!}{J!(2m+p-1)!} \quad \text{et} \quad \beta_p = \sum_{J=0}^{p-2} \sum_{H=1}^{p-1-J} \frac{(m+J)!(2m+J+H)!}{J!(m+J+H)!(2m+p-1)!}.$$

L'annulation du coefficient de $K_p$ donne, si $p \leqslant m$, la condition:

$$(1 - (-1)^N e^{2im\pi/n})(b_{2m} \alpha_p + (b_m)^2 \beta_p) \in \mathbb{R}. \tag{7.3}$$

Comme $2m + 2(p+n) = (N+2)n$, la condition $(\mathbf{B}_{p+n, N+2})$ donne, si $p + n \leqslant m$:

$$(1 - (-1)^N e^{2im\pi/n})(b_{2m} \alpha_{p+n} + (b_m)^2 \beta_{p+n}) \in \mathbb{R}. \tag{7.4}$$

Or, on montre que, si $2 \leqslant p < q$:

$$\alpha_q (\alpha_p)^{-1} < \beta_q (\beta_p)^{-1}.$$

On déduit donc de (7.3) et (7.4) que $(1 - (-1)^N e^{2im\pi/n})(b_m)^2 \in \mathbb{R}$.

## 8. Epilogue

En ce qui concerne l'existence de solutions non triviales au problème (B), nous en sommes réduits aux conjectures parce que nous n'avons pas de méthode permettant, soit de court-circuiter les relations $(\mathbf{B}_{p,N})$, soit de les traiter globalement.

Nous en avons étudié certaines de façon théorique ($p = 3$ sous $(\mathscr{H}_m)$ par exemple, ce qui donne des renseignements pour $n = 3, 6$ en particulier) et d'autres par calcul matriciel sur micro-ordinateur (par exemple dès que $p > 3$).

Voici quelques conjectures:

> Si $n = 2$, si les $b_j$ pour $j \geqslant 2$ sont nuls, pour tout $b_1 \in \mathbb{C}$, on a une solution au problème (B). (C1)

Si $(b_1)^2 \notin \mathbb{R}$, ce type de solution est non triviale. C'est cette situation que nous avons traitée dans l'exemple 4.9.

On émet aussi la réciproque de (C1).

> Si $n = 2$, toute solution de (B) telle que l'un au moins des $b_j$ pour $j \geqslant 2$ soit non nul, est triviale. (C1')

Et enfin:

Si $n \geqslant 3$, il existe au moins une solution non triviale au problème (B). (C2)

On peut trouver dans [DS] quelques arguments en faveur de ces conjectures fondés sur le calcul de conditions sur les $b_j$.

## Références

[BB] P. Berard et G. Besson, Spectres et groupes cristallographiques. II. Domaines sphériques, *Ann. Inst. Fourier* **30**, No. 3 (1980), 237–248.

[BS] M. S. Baouendi et J. Sjöstrand, Analytic regularity for the Dirichlet problem in domains with conic singularities, *Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci (4)* **3**(1977), 515–530.

[D1] M. Dauge, Coefficients des singularités pour le laplacien (problème de Dirichlet) sur un domaine avec point anguleux, *Sém. Anal. Nantes* (1980/1981), 3.

[D2] M. Dauge, "Régularités et singularités des solutions de problèmes aux limites elliptiques sur des domaines singuliers de type à coins," Thèse d'État, Nantes, 1986.

[DS] M. Dauge et J. L. Steux, Problème de Dirichlet pour le laplacien dans un polygone curviligne, *Sém. E. D. P. Nantes* (1984/1985).

[G] P. Grisvard, Problèmes aux limites dans des polygones. Mode d'emploi, Prépublication de l'Université de Nice No. 45, 1984.

[K] V. A. Kondrat'ev, Boundary problems for elliptic equations with conical or angular points, *Trans. Moscow Math. Soc.* **16** (1967), 227–313.

[MP] V. G. Maz'ja et B. A. Plamenevskii, On the coefficients in the asymptotics of solutions in elliptic boundary value problems in domains with conical points, *Math. Nachr.* **76** (1977), 29–60. Traduit dans: *Amer. Math. Soc. Transl. (2)* **123** (1984), 57–88.

[W] W. Wasow, Asymptotic development of the solution of Dirichlet's problem at analytic corners, *Duke Math. J.* **24** (1957), 47–56.